1.0 REALNA FUNKCIA VIAC REALNYCH PREMENNYCH

$R^n = R \times R \times ... \times R$ - n-rozmerny realny priestor
$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$
$Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ vzdialenost 2 bodov v $R^n d(x,y) = \sqrt{\sum(x_i - y_i)}$
$S \subset E_n$ Bod $A \in E_n$ nazyvame :
1) **Vnutorny bod** mnoziny S ak $\exists$ take $O(A) \subset S$, ktore je podmnozinou S
2) **Vonkajsi bod** mnoziny S ak $\exists O(A) \cap S = 0$
3) **Hranicny bod** mnoziny S ak jeho okolie obsahuje body mnoziny S aj body, ktore do S nepatria
4) **Hromadny bod** ak $\forall$ jeho okolie obsahuje ∞ vela bodov mnoziny S
Mnozina $\forall$ vnutornych bodov mnoziny S sa nazyva **vnutro** mnoziny S
Mnozina $\forall$ hranicnych bodov mnoziny S sa nazyva **hranica** mnoziny S
Mnozina S sa nazyva :
Otvorena ak kazdy jej bod je jej vnutornym bodom
Uzavreta ak vnutro S $\cup$ hranica S
Ohranicena ak $\exists K \in R, A \in S$, ze $d(x,y) < K : \forall X \in S$
Uzavreta a ohranicena = **kompaktna** mnozina
Konvexna ak lubovolne dva jej body mozeme spojit useckou, ktora cela lezi v mnozine

1.1 REALNA FUNKCIA N REALNYCH PREMENNYCH

Def: Nech $M \subset E_n$. Pravidlo f, ktore $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ priradi jedine realne cislo $y \in R : y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sa nazyva **realna funkcia n realnych premennych**.
M - definicny obor $D(f) \subset E_n$
obor hodnot $H(f) = y \in R : \exists X \in D(f) : y = f(x) \subset R$

1.1.1 LIMITA

Def: Nech funkcia f je definovana na nepradznom okoli bodu A (pricom v A funkcia nemusi byt definovana). f ma v A lomitu rovnu $L = R \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall X \in O\delta(A) : |f(X) - L| < \epsilon$
$lim_{X \to A} f(X) = L$
Funkcia f ma v bode A limitu rovnu L $\Leftrightarrow$ ak pre lubovonlnu postupnost bodov $[A^i]_{i=1}^{\infty} \to A, [f(A^i)]_{i=1}^{\infty} \to L$

1.1.2 SPOJITOST

Def: Nech bod A je hromadny bod $D(f)$. Funkcia f je spojita v bode $A \Leftrightarrow \exists lim_{X \to A} f(X) = f(A)$
Veta: Ak je funkcia f spojita v bode A ako funkcia n premennych, potom je spojita v bode A v kazdej svojej premennej
$f(x,y)$ spojita v bode $(a_1, a_2) \Rightarrow$ spojita aj $g(x) = f(x, a_2)$, $h(y) = f(a_1, y)$

1.2 PARCIALNA DERIVACIA

Def: Nech $f(x,y), A = (x_0, y_0), y = y_0 \Rightarrow g_1(x) = f(x, y_0)$.
$g_1'(x_0) = lim_{h \to 0} \frac{g_1(x_0+h) - g_1(x_0)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$. Ak tato limita $\exists$ a je vlastna, nazyva sa **parcialna derivacia funkcie** f podla x v bode $A = (x_0, y_0)$

1.3 PRVY DIFERENCIAL

Def: Nech
1. $f(x_1, \ldots, x_n)$ je definovana v okoli bodu $O(A) A = (a_1, \ldots, a_n)$
2. $\exists \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) i = 1, \ldots, n$

potom **prvy diferencial** funkcie f v bode A je $df(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(A)(x_i - a_i)$

1.4 DOTYKOVA ROVINA

Def: Rovnica dotykovej roviny ku grafu $f(x,y)$ v bode $(x_0,y_0), f(x_0,y_0)$
$z = f(x_0,y_0) - df(x_0,y_0)$

1.5 PARCIALNE DERIVACIE VYSSICH RADOV

$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = f_{xx}$
$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = f_{yy}$
$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = f_{xy}$
$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = f_{yx}$
Veta: Nech funkcia f je spojita na $M \subset D(f)$ a ma na mnozine M spojite prve parcialne derivacie a jednu zmiesanu. f_x, f_y, f_{xy}. Potom na $M \exists f_{yx}$ a plati $f_{xy} = f_{yx}$
Veta: Nech ma f na M vsetky parcialne derivacie $k-1$ radu spojite. Potom pri k-tom rade nezalezi na tom v akom poradi derivujeme podla jednotlivych poremennych, ale na tom kolkokrat podla jednotlivych premennych derivujeme.

1.6 DIFERENCIALY VYSSICH RADOV

Def: Majme $f(x,y), A \in D(f)$ a $\exists f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy}$ v bode A. Potom $\exists O(A) \subset D(f), \forall X \in O(A)$ druhy diferencial funkcie v bode $A:$
$d^2 f(X,A) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(A)(x-a_1)^2 + 2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(A)(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(A)(y-a_1)^2$
$d^3 f(X,A) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\delta^3 f}{\delta x_i \delta x_j \delta x_k}(A)(x_i-a_i)(x_j-a_j)(x_k-a_k)$
Veta: Nech f je hladka funkcia, ktora ma na otvorenej mnozine $M \subset D(f)$ spojite parcialne derivacie lubovolneho radu. Nech bod $A \in M$. Potom $\exists O(A) \subset D(f)$, ze $\exists X \in O(A)$: $f(X) = f(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k f(X,A)}{k!}$
Def: Taylorov rozvoj polynomu :
$T_m(f,X,A) = f(A) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(X,A)}{k!}$

1.7 EXTREMY FUNKCIE VIAC PREMENNYCH

Def: Nech $M \subset D(f)$ otvorena, bod A je hromandny bod M.

- potom bod A nazyvame lokalne maximum (min) ak $\exists O(A) : \forall X \in O(A) f(X) \leq f(A)(f(X) => f(A))$
- potom bod A nazyvame globalne maximum (min) ak $\forall X \in D(f) : f(X) <= f(A) resp(f(X) => f(A))$

1. **Volne extremy** bez ohranicenia, hladame na celom $D(f)$.
2. **Extremy na hranici** ohranicenia v tvare rovnosti.
3. **Absolutne extremy** ohranicenia v tvare nerovnosti, ich existencia je zarucena iba pre spojite fcie na kompaktnej mnozine.

Ak mame $f(x_1,\ldots,x_n)$, potom bod A budeme nazyvat **stacionarny bod f** ak $\exists \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) = 0; i = 1,\ldots,n$

$n \times n$ **k-ty hlavny minor** : determinant submatice. $D_K = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & \ldots & a_{KK} \end{vmatrix}$

1.8 VOLNE EXTREMY

- Hladame bod, co maximalizuje (min) funkciu $y = f(x_1, \dots, x_n)$
- Postup je takyto:

  1. Vypocitame parc. derivacie podla $\forall$ premennych a urcime kriticke body.
     $\frac{\delta f}{\delta x_i}; i = 1, \dots, n$
  2. Vypocitame stacionarne body riesenim systemu $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0; i = 1, \dots, n$.
  3. Vypocitame Hessovu maticu funkcie f :
     $$H = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$$
  4. Test:
     - Ak su vsetky hlavne minory H v bode A(stacionarny alebo kriticky) kladne, potom je bod A lokalne minimum funkcie f.
     - Ak plati $(-1)^k.D_k > 0; k = 1, \dots, n$, pricom prvy hlavny minor je zaporny, tak bod A je lokalne maximum.
     - Ak je niektory hlavny minor $= 0$, test nemozeme pouzit.
     - V ostatnych pripadoch bod A nie je extrem.

1.9 EXTREMY NA HRANICI

- Max (resp. min); $z = f(x_1, \dots, x_n)$
- Podmienky: $g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1$; $g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m$, kde $f, g_1, \dots, g_m$ su dvakrat diferecnovatelne.
- Pripustna mnozina $\Omega = X \in D(f) : g_i(x) = b, \forall i = 1, \dots, m$ iba tu hladame extremy f.

1.9.1 Metoda Lagrangeovych multiplikatorov

1. Vytvorime Lagrangeovu funkciu $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1(b_1 - g_1(x_1, \dots, x_n)) + \cdots + \lambda_m(b_m - g_m(x_1, \dots, x_n))$
2. $\frac{\delta L}{\delta x_i} = 0, i = 1, \dots, n$
   $\frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0, j = 1, \dots, m \Rightarrow$ riesenim vyjdu body. $B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$
   Mame $n + m$ rovnic o $n + m$ neznamych.
3. $H_L \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$ typu $n \times n$
4. Test: $H_L(B^*)$
   - Ak su $D_K > 0$ pre $k = 1, \dots n \Rightarrow A^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ je minimum f na Ω.
   - Ak $(-1)^k.D_k > 0, k = 1, \dots, n \Rightarrow A^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ je maximum na Ω.
   - Ak $\exists D_K = 0 \Rightarrow$ test nemozno pouzit.
   - v ostatnych pripadoch v $A^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ nie je na Ω extrem.

1.10 ABSOLUTNE (GLOBALNE) EXTREMY

Veta: Nech f je spojita na kompaktnej mnozine $\Omega \subset E_n$. Potom $\exists x_1, x_2 \in \Omega : \forall X \in \Omega : f(X_1) \leq f(X) \leq F(X_2) \Rightarrow f$ je spojita na kompaktnej mnozine $\Omega \subset E_n$ ma na Ω globalne maximum aj minimum - Absolutne extremy. Postup

1. Vypocitame volne extremy f, dalej len z Ω
2. Vypocitame extremy na hranici Ω, vratane vrcholov
3. Absolutne extremy - najvacsie/najmensie funkcne hodnoty

1.11 KUHN-TUCKEROVE PODMIENKY

Nech funkcia $f(x_1, \dots x_n)$ je spojita az do druhych derivacii na mnozine $M \subset D(f)$.
f je **konvexna** na $M \Leftrightarrow \forall X \in M$ su vsetky D_k Hessovej matice $H(X)$ nezaporne.
f je **konkavna** na $M \Leftrightarrow$ ak pre $\forall X \in M$ pre D_k Hessovej matice $H(X)$ su $(-1)^k.D_k \geq 0, k = 1, \dots, n$ - linearne funkcie su konvexne.

- $z = f(x1, \dots, x_n)$ za podmienok $g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, g_n(x_1, \dots, x_n) \leq b_n$.
  Pre maximum:f je konkavna, g_1, g_n konvexne.
  Pre minimum:f je konvexna, g_1, g_n konkavne.
- P1(max): $\frac{\delta f}{\delta x_j}(A^*) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g_i}{\delta x_j}(A^*) = 0$
- P1(min): $\frac{\delta f}{\delta x_j}(A^*) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta g_i}{\delta x_j}(A^*) = 0$
- P2: $\lambda_i(b_i - g_i(A^*)) = 0$
- P3: $\lambda_i \geq 0$